Abstrakt

Das Ziel dieser Arbeit ist es, Prognosen über die Abnahme der Erdrotation zu nehmen und Tidenkraftwerke und andere Zukunftsszenarien im Anbetracht dessen zu beleuchten. Verbunden damit wird der sich verändernde Orbit des Mondes um die Erde miteinbezogen. Im praktischen Teil wird eine Messung des siderischen Tages mithilfe eines kardanisch aufgehängten Kreisels durchgeführt und beurteilt.

Im Speziellen wird Erdrotation und Mondbahn in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft beleuchtet und mathematisch beschrieben sowie Folgen für die Menschheit durch eine Veränderung dieser beleuchtet. Dabei ist es Ziel, die angewandten Formeln, physikalischen Gesetze und mathematischen Berechnungen dem Leser verständlich darzulegen. Dabei sind einige Vorgänge lediglich Näherungen an die Wirklichkeit. Die Abweichungen, die dadurch zustande kommen, werden im Fazit beleuchtet.

Die Chancen und Gefahren der Zukunft im Bezug auf Stromgewinnung durch die Tiden und die Auswirkungen des Klimawandels auf die Erdrotation werden im nächsten Teil behandelt und sollen Bezug der Ergebnisse zur Realität herstellen.

Zusammenfassung der wichtigsten Resultate

<u>Theorie</u>

Im Folgenden werden die in dieser Arbeit genunutzten Formeln in der zum Verständnis benötigten Genauigkeit vorgestellt.

Im Anschluss werden relevante Formeln ihrer spezifischen Funktion angepasst.

<u>Drehmoment</u> ***M***

$$M = F \cdot r \cdot \sin(\vartheta) \quad (1)$$

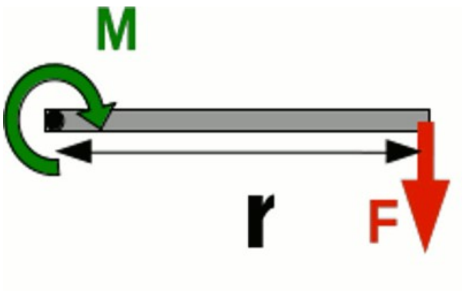


Abb. 1

r ist der Abstand vom Mittelpunkt, in dem die Kraft ***F*** im Winkel ϑ wirkt. In der Abbildung steht ***F*** im rechten Winkel zu ***r***, das Drehmoment ist also maximal. Vektoriell kann das Drehmoment auch mit dem Kreuzprodukt beschrieben werden:

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} \quad (2)$$

<u>Trägheitsmoment</u> Θ

$$M = \Theta \cdot \alpha \quad (3)$$

$$mit\ \Theta = m \cdot r^2 \quad (4)$$

Das Trägheitsmoment verhält sich bei Rotationen ähnlich der Masse bei geradlinigen Bewegungen. So lässt sich auch eine Ähnlichkeit zwischen dem Drehmoment bei Rotation und der Kraft F bei geradlinigen Bewegungen erkennen. Im gegensatz zur Kraft hängt das Drehmoment aber zusätzlich vom Radius zum Rotationsmittelpunkt ab und nur der in die Richtung des Drehmoments wirkende Kraftanteil ist zu beachten. ***α*** ist hier die Winkelbeschleunigung und in Radiant/Quadratsekunde gemessen.

In der Praxis ist jedoch die Masse eines rotierenden Körpers nicht in einem Punkt bei Radius ***r*** vereint. Besser ließe sich das Trägheitsmoment eines realen Kreisels also mit der Formel

$$\Theta = \int_V r_\perp^2 \rho(\vec{r})\, dV \quad (5)$$

mit ρ als Dichte des Körpers

beschreiben.

Drehimpuls $\vec{L}$

Der Impuls eines Körpers $\vec{p}=m\cdot\vec{v}$ beschreibt, wie schwer es ist, dessen Bewegung anzuhalten. Der Drehimpuls beschreibt also, wie schwer es ist, die Rotation eines Körpers anzuhalten. Berechnet werden kann der Drehimpuls, indem der Impuls einer Masse in deren Rotationsrichtung und die Entfernung zum Mittelpunkt bestimmt wird. Da die Rotation eines Körpers immer senkrecht zu dessen Radius $\vec{r}$ ist, lässt sich die Formel

$$\vec{L}=\vec{p}\times\vec{r}=m\vec{v}\times\vec{r}\,(6)$$

herleiten.

Der Drehimpuls steht also immer senkrecht auf der Ebene der Rotation. Es gilt die Drehimpulserhaltung.

Zentripetalkraft F_Z

$$F_Z=m\cdot\frac{v^2}{r}=m\cdot\omega^2\cdot r\,(7)$$

mit ω als Winkelgeschwindigkeit

Die Zentripetalkraft ist die Kraft einer Rotation, die die rotierende Masse zum Mittelpunkt zieht. Sie zeigt also immer nach innen.

Rotationsenergie E_{rot}

Die Rotationsenergie ist die Energie eines starren, um die eigene Achse rotierenden Körpers. Sie ist ähnlich der kinetischen Energie bei sich linear bewegenden Körpern.

$$E_{rot}=\frac{1}{2}\Theta\cdot\omega^2\,(8)$$

Newtonsches Gravitationsgesetz

$$F_g=G\frac{m_1\cdot m_2}{r^2}\,(9)$$

mit Gravitationskonstant $G = 6{,}67430 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$

Keplerschen Gesetze

1. Die Bahn eines jeden Planeten ist eine Ellipse, wobei die Sonne in einem der beiden Brennpunkte steht.
2. Die Geschwindigkeit der Planeten auf ihrer Bahnellipse ist nicht konstant, sondern variiert so, dass ein von der Sonne zum Planeten gezogener Fahrstrahl in gleichen Zeitabschnitten gleich große Flächen überstreicht.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten je zweier Planeten verhalten sich zueinander wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen.

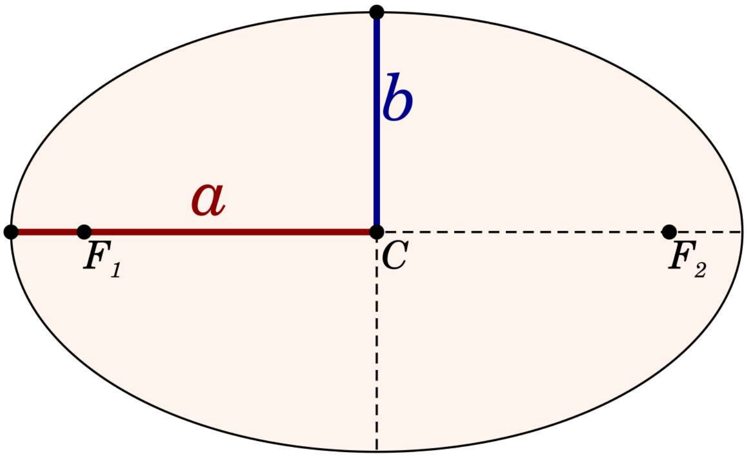


Abb. 2

Die Abbildung zeigt einen Orbit um einen der beiden Brennpunkte F_1 und F_2. Hierbei ist a die große Halbachse und b die kleine Halbachse. C ist der Mittelpunkt, während c den Abstand der Brennpunkte zum Mittelpunkt beschreibt. Wie elliptisch eine Umlaufbahn ist, wird durch die Exzentrizität e beschrieben, die sich durch

$$e = \frac{c}{a} \quad (10)$$

bestimmten lässt. Wenn die Exzentrität 0 ist, so bescheibt die Umlaufbahn einen perfekten Kreis. Werte zwischen 0 und 1 beschreiben verschieden starke Ellipsen. Bei einem Wert von 1 lägen die Brennpunkte genau auf der Umlaufbahn.

Die große Halbachse a ist gleich dem mittleren Abstand eines Körpers in diesem Orbit.

Spezifische Bahnenergie

Die spezifische Bahnenergie

$$\epsilon = \frac{-G\, m_{ges}}{2a} (11)$$

ist die Energie, die sich einem Orbit um einen Himmelskörper zuordnen lässt. Dabei ist diese Energie = 0, wenn sich ein Körper nicht in einer Umlaufbahn befindet (also z.B. wenn die kinetische Energie groß genug ist, um der Anziehungskraft zu entkommen) und negativ, je näher die Umlaufbahn um deren Brennpunkt verläuft. *G* ist hier die Gravitationskonstante, m_{ges} die Gesamtmasse des Systems und a die große Halbachse des Orbits.

Schwerpunktsatz

Der Schwerpunktsatz

$$m_1 \cdot d_1 = m_2 \cdot d_2 (12)$$

beschreibt die jeweilige Distanz einer Masse vom Schwerpunkt eines Systems zweier Massen, die in einem Gravitationsverhältnis zueinander stehen.

Spezifischer Bezug auf die Erde

Man berechne das Trägheitsmoment der Erde Θ_E mit der Formel (5). Der Einfachheit halber nehme man an, die Erde sei eine perfekte Kugel.

$$\Theta_E = \int_V^{\square} r_\perp^2 \rho(\vec{r})\, dV (13)$$

Um das Integral zu berechnen böten sich Kugelkoordinaten an:

$$\Theta_E = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_\perp} \rho(\vec{r}) (\sin(\vartheta) \cdot r ¿ ¿ \perp)^2 \cdot \sin(\vartheta) r^2\, d\, r d\varphi\, d\vartheta (14) ¿$$

Die Lösung dieses Integrals ist:

$$\Theta_E = \frac{2}{5} r^5 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} (15)$$

Mit der Masse einer Kugel $m_K = \frac{4}{3} \rho \pi r^3$ ergibt sich:

$$\Theta_E = \frac{2}{5} r^2 m_K (16)$$

Da aber die Dichte der Erde zum Kern höher wird und in den einzelnen Schichten starke Unterschiede aufweist, muss man in der Formel (12) zusätzlich die Dichte über den Radius integrieren.

$$\Theta_E = \int_0^{r_{max}} \frac{2}{5} r^5 \cdot \pi \cdot \rho(r) \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{15} \cdot \pi \cdot \int_0^{r_{max}} r^5 \rho(r) (17)$$

Um Aussagen über die Erdrotation treffen zu können, müssen einige Größen bekannt sein:

<u>Mittlerer Radius der Erde</u>

Der Radius der Erde lässt sich durch den Umfang der Erde bestimmen. Der Umfang der Erde ist aber nicht überall der gleiche. Durch die Erdrotation ist die Erde abgeflacht und der Äquatorumfang

$U_{Ä} \approx 6\,378\,137\,m$

ist größer als der Polumfang

$U_P \approx 6\,356\,752\,m$.

Deshalb nehme man zur Näherung (um die Erde näherungsweise als Kugel betrachten zu können) den Mittelwert dieser beiden Umfänge. Daraus ergibt sich die Formel

$$r_E \approx \sqrt[3]{\frac{U_{Ä} \cdot U_{Ä} \cdot U_P}{2\pi}} \approx \sqrt[3]{\frac{(6\,378\,137\,m)^2 \cdot 6\,356\,752\,m}{2\pi}} \approx 6\,371\,000\,m$$

<u>Masse der Erde</u>

Die Masse der Erde lässt sich mithilfe des Newtonschen Gravitationsgesetzes herleiten. Dazu wird die Kraft gemessen, die auf der Erdoberfläche auf eine Masse $m_1 = 1\,kg$ wirkt. Mit dem mittleren Erdradius r_E und der Formel (9)

$$F_{gE} = G \frac{m_1 \cdot m_E}{r_E^2}$$

$$¿> m_E = \frac{F_{gE} \cdot r_E^2}{G \cdot m_1} \approx \frac{9{,}81 \frac{kgm}{s^2} \cdot (6\,371\,000\,m)^2}{6{,}67430 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 1\,kg} \approx 5{,}966 \cdot 10^{24}\,kg$$

<u>Siderische Tagesdauer</u>

$t_s \approx 86\,164{,}0989\, s$

Die siderische Tagesdauer der Erde ist die Dauer einer kompletten Umdrehung relativ zum Fixsternhintergund des Nachthimmels. Der siderische Tag wird in späteren Berechnungen genauer erklärt.

<u>Siderischer Monat</u>

$T_M \approx 2\,360\,591\, s$

Ein siderischer Monat ist gleich der Periodendauer einer Umdrehung des Mondes um die Erde.

<u>Große Halbachse und Exzentrizität des Mondes</u>

Man nehme an, die Mondumlaufbahn um die Erde sein von keinen anderen Himmelskörpern beeinflusst. Mit der Formel (10) und Perigäum *P* und Apogäum *A* (kleinste und größte Distanz des Mondes zur Erde)

$P \approx 363\,300\,000\, m$

$A \approx 405\,507\,000\, m$

lässt sich die große Halbachse a des Mondes auf ungefähr

$a_M \approx 384\,404\,00\,0\, m$

berechen, indem *P* und *A* addiert und halbiert werden, wie aus der Abbildung 2 hervorgeht. Subtrahiert man jetzt *P* von a, so erhält man

$c_M = a_M - P \approx 384\,404\,00\,0\, m - 363\,300\,000\, m = 21\,104\,000\, m$

als Distanz zwischen Mittelpunkt und Brennpunkt des Orbits. Mit der Formel (10) lässt sich nun die Exzentrizität des Mondes

$$e_M = \frac{c_M}{a_M} = \frac{21\,104\,000\, m}{384\,404\,00\,0\, m} \approx 0{,}05490$$

berechnen.

<u>Masses des Mondes</u> $m_M \approx 7{,}346 \cdot 10^{22}\, kg$

Um die Masse des Mondes zu berechnen, beachte man, dass sich der Mond um den gemeinsamen Schwerpunkt von Erde und Mond und nicht um den Mittelpunkt der Erde bewegt, da die Gravitationskraft auf Gegenseitigkeit beruht.

Zunächst wird die Gravitationskraft $F_{g\,ME}$ und die Zentripetalkraft $F_{Z\,M}$ (Gleichungen (7) und (9)) im Bezug auf das Erde-Mond-System gleichgesetzt

$$m_M \cdot \omega_M^2 \cdot d_M = G \frac{m_E \cdot m_M}{r_{EM}^2}$$

und für die (mittlere) Winkelgeschwindigkeit $\omega_M = \frac{2\pi}{T_M}$ eingesetzt. Dabei ist die Periodendauer der Mondumlaufbahn $T_M \approx 2\,360\,591\,s$ ein siderischer Monat. d_M beschreibt den Radius des Mondes um den gemeinsamen Schwerpunkt während r_{EM} den Radius zwischen dem Mittelpunkt der Erde und dem des Mondes beschreibt.

Die große Halbachse des Mondes $a_M \approx 384\,404\,000\,m$ ist die mittlere Distanz zwischen Mond und Erde r_{EM}.

Durch Teilen durch die Mondmasse m_M ergibt sich die Formel

$$\left(\frac{2\pi}{T_M}\right)^2 \cdot d_M = G \frac{m_E}{r_{EM}^2}$$

$$¿> d_M = G \frac{m_E}{r_{EM}^2} \cdot \left(\frac{T_M}{2\pi}\right)^2$$

für den Radius der Mondumlaufbahn

$$d_M = 6{,}67430 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \frac{5{,}966 \cdot 10^{24}\,kg}{(384\,404\,000\,m)^2} \cdot \left(\frac{2\,360\,591\,s}{2\pi}\right)^2 = 380\,333\,868\,m,$$

mit dem man durch die Formel (12) bezogen auf Erde und Mond

$$m_E \cdot d_E = m_M \cdot d_M$$

die Mondmasse

$$m_M = \frac{m_E \cdot d_E}{d_M} = m_E \cdot \frac{(r¿¿EM - d_M)}{d_M} \approx \frac{5{,}966 \cdot 10^{24}\,kg \cdot (384\,404\,000\,m - 380\,333\,868\,m)}{384\,404\,000\,m}¿$$

$$\approx 6{,}317 \cdot 10^{22}\,kg$$

berechnen kann.

Ziele und Umsetzung

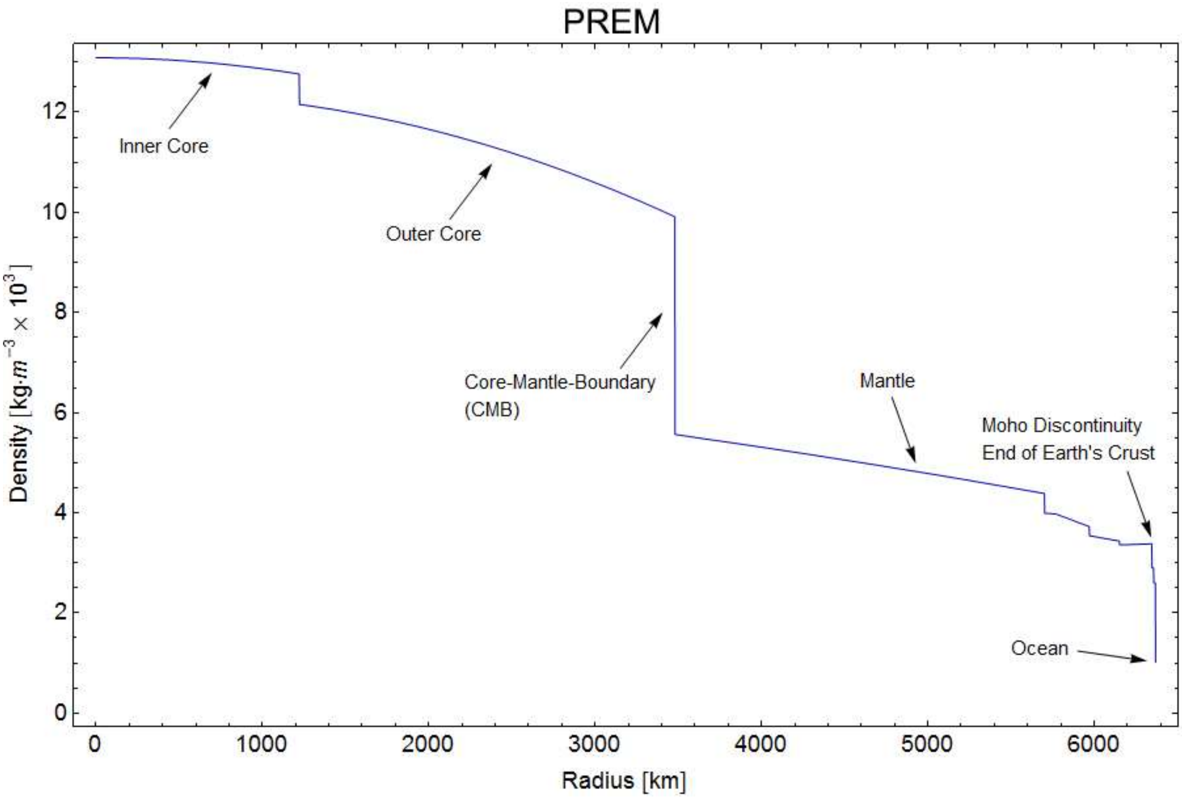
Ziele und geplante Messungen, die durch das Gyroskop erreicht werden sollten

Probleme in der Umsetzung dieser

Messungen der Experimente

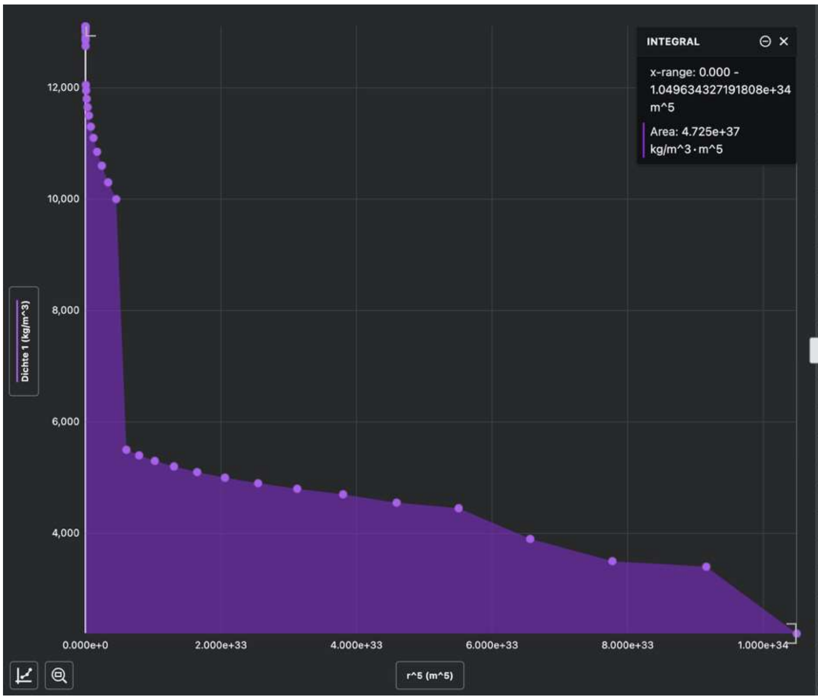
Ergebnisse

Ergebnisse der Messungen werden vorgestellt



Preliminary Reference Earth Model (PREM)

Wie aus diesem Diagramm hervorgeht, lässt sich die Dichte der Erde aber nicht als eine Funktion beschreiben, da sie Sprünge und Unregelmäßigkeiten an Schichtgrenzen (z.B. zwischen dem fersten Erdkern und dem größtenteils flüssigen Erdmantel). Um diesen Verlauf der Erddichte trotzdem gut beschreiben zu können, wird die Dichte der Erde in Abhängigkeit des Radius in viele Schritte unterteilt und wie in (13) Integriert:



	Dichte/Radius der Erde			
	Dichte (g/cm^3)	Dichte 1 (kg/m^3)	r (m)	r^5 (m^5)
1	13.10	13100.000	0	0.000
2	13.10	13100.000	200000	3.2e+26
3	13.05	13050.000	400000	1.024e+28
4	13.00	13000.000	600000	7.776e+28
5	12.90	12900.000	800000	3.2768e+29
6	12.85	12850.000	1000000	1e+30
7	12.75	12750.000	1200000	2.48832e+30
8	12.05	12050.000	1400000	5.37824e+30
9	11.95	11950.000	1600000	1.048576e+...
10	11.80	11800.000	1800000	1.889568e+...
11	11.65	11650.000	2000000	3.2e+31
12	11.50	11500.000	2200000	5.153632e+...
13	11.30	11300.000	2400000	7.962624e+...
14	11.10	11100.000	2600000	1.1881376e...
15	10.85	10850.000	2800000	1.7210368e...
16	10.60	10600.000	3000000	2.43e+32
17	10.30	10300.000	3200000	3.3554432e...
18	10.00	10000.000	3400000	4.5435424e...
19	5.50	5500.000	3600000	6.0466176e...
20	5.40	5400.000	3800000	7.9235168e...
21	5.30	5300.000	4000000	1.024e+33
22	5.20	5200.000	4200000	1.30691232...
23	5.10	5100.000	4400000	1.64916224...

Daraus folgt mit (13)

$$\Theta_E = \frac{8}{15} \cdot \pi \cdot \int_0^{r_{max}} 6\,371\,000^5\, m^5\, \rho(r) \approx \frac{8}{15} \cdot \pi \cdot 4{,}725 \cdot 10^{37}\, kg\, m^2$$

$$\approx 7{,}917 \cdot 10^{37}\, kg\, m^2.$$

Mit diesem Drehmoment und der Formel (8) kann jetzt die Rotationsenergie ausgerechnet werden. Dazu wird die Dauer des siderischen Tages der Erde benötigt, also die Zeit, die die Erde braucht, um sich relativ zu einem unendlich weit entfernten Himmelskörper (oder praktidsch relativ zum Fixsternhintergrund des Sternenhimmels) einmal um sich selbst zu drehen. Dies ist so wichtig, da die Erde sich relativ zur Sonne nicht vollständig um sich selbst drehen muss, um die Anfangstageszeit zu erreichen. In der Zeit, in der ein Tag vergeht, hat sich die Erde in ihrem Orbit um die Sonne weiterbewegt und muss sich nun weniger weit drehen, um die gleiche Ausrichtung zur Sonne widerherzustellen.

Praktisch ließe sich die siderische Tagesdauer also nicht durch den Sonnenstand, sondern nur durch den Stand des Fixsternhintergrundes des Nachthimmels ermitteln. Hierbei dürfte jedoch die Bewegung einzelner Himmelskörper im Fixsternhintergrund nicht außer Acht gelassen werden.

Eine genauere Alternative zur Ermittlung der siderischen Tagesdauer bieten Kreisel. Nach der Formel (6) für den Drehimpuls ist die Richtung dieses Impulses immer senkrecht zu der Bewegung eines beliebigen Punktes P des rotierenden Objekts und dem Radius vom Rotationsmittelpunkt zu diesem Punkt P. Damit lässt sich eine Ebene aufspannen, dessen Normalvektor (in Richtung des Drehimpulses) für jeden P des rotierenden Objekts die gleiche Richtung hat, ganz egal, wo und wann in der Rotation P sich befindet (Impulserhaltung). Die Richtung des Drehimpulses hängt also nur von der primären Ausrichtung des Kreisels ab, durch die beschriebene Drehimpulserhaltung verändert sich diese Richtung auch nicht ohne Einflüsse von Außen.

Ein gelagerter Kreisel, der konstant in Richtung des Drehimpulses beschleunigt wird, muss sich in jede Bewegung drehen können, ohne dabei eine Kraft überwinden zu müssen. Die Aufhängung des Kreisels muss drei Rotationsachsen haben, die senkrecht aufeinander stehen. Diese Rotationsachsen sollten möglichst wenig Reibung aufweisen.

Mithilfer eines solchen Kreisels kann nun die Dauer eines siderischen Tages t_s und damit die Winkelgeschwindigkeit der Erde $\omega_E$ermittelt werden.

Mit $t_s = 86164{,}0989\, s$ ist

$$\omega_E = \frac{2\pi}{t_s} \approx 7{,}292\,115\,147 \cdot 10^{-5} \frac{rad}{s}.$$

Berechnung der Rotationsenergie

$$E_{rot\,E} = \frac{1}{2} \Theta_E \cdot {\omega_E}^2 \approx 2{,}105 \cdot 10^{29} J$$

mithilfe der Formel (8).

Vor etwa 600 Millionen Jahren hatte der Tag eine ungefähre Länge von 21 Stunden. Seitdem hat sich der Tag durch den folgenden Prozess verlangsamt: Betrachtet man das Erde-Mond System aus der Sicht des Mondes, so sieht es so aus, als drehe sich die Erde unter dem Mond weg. Dabei wird aber die Masse der Ozeane angezogen und bewegt sich weniger schnell, was zu den Tiden führt. Dabei entsteht jedoch Reibung zwischen dem Wasser der Ozeane und der festen Erdkruste. Diese Reibung verkleinert das Drehmoment der Erde und ist für die Verkürzung des Tages verantwortlich. Das verlorene Drehmoment der Ozeane wird auf den Mond übertragen, weswegen sich die spezifische Bahnenergie des Mondes vergrößert und der Mond sich langsam von der Erde entfernt.

Genauer beschrieben werden kann dies mithilfe Newtons Gravitationsgesetzes und der Zentripetalkraft. Diese beiden müssen (im Mittel oder auf einer vereinfachten perfekten Kreisbahn) gleich sein, damit der Orbit stabil ist. Die Zentripetalkraft hängt aber von der Geschwindigkeit des Körpers ab. Um den Drehimpuls des Erde-Mond-Systems aber zu erhalten, muss die Rotationsgeschwindigkeit des Mondes zunehmen, was zu einem Ungleichgewicht zwischen der Gravitationskraft zwischen Erde und Mond und der Zentripetalkraft führt. Die Zentrifugalkraft drückt den Mond also auf einen höheren Orbit. Dieser Vorgang findet weiterhin statt und der Mond entfernt sich weiter von der Erde.

Durch einen auf dem Mond platzierten Spiegel kann man mit einem Laser von der Erde aus den Abstand zum Mond bestimmen. Dadurch lässt sich ein Wert bestimmen, mit dem der Mond sich jedes Jahr von der Erde entfernt. Laut der NASA ist dieser Wert 3,8 cm.

Um die spezifische Bahnenergie des Mondes zu berechnen wird die Formel (11)

$$\epsilon_M = \frac{-G\,m_{ges}}{2\,a_M} = ¿$$

Berechnung der Bahnenergiedifferenz des Mondes/Jahr => Berechnung daraus der Erd-Rotationsenergiedifferenz/Jahr => Tagesverlängerung/Jahr => mögliche Konsequenzen dieser

Rotationsenergieverlust: Ausblick auf Tidenkraftwerke, Effekt auf Erdrotationsabnahme durch Deckung des Energiebedarfs der Menschheit durch Tidenkraftwerke, Auswirkungen des Klimawandels (Südpoleis geschmolzen und auf gesamte Erde verteilt => anderes Drehmoment…)

Fehleranalyse: Abweichung von Literaturwerten und Ursachen der Abweichungen

Ausblick

Anhang