Mathematische Begriffe und Symbole

allgemeine Symbole

Symbol	Name	Definition
$=$	gleich	$2+3=5$
$:=$	definiert als	setze $z:=x^2+1$, damit folgt ...
$\equiv$	definitionsgemäß gleich	$\mathbb{N}\equiv\{1,2,3,...\}$
$\approx$	ungefähr	$\pi\approx 3,1415$
$\stackrel{!}{=}$	Bedingung	Nullstellen erfüllen die Bedingung: $f(x)\stackrel{!}{=}0$
$<$	kleiner als	$2<3$
$\leq$	kleiner oder gleich	Kreisfläche mit Rand: $x^2+y^2\leq r^2$
$>$	größer als	$3>2$
$\geq$	größer oder gleich	x nicht negativ: $x\geq 0$
$\Rightarrow$	daraus folgt	$x^2=9\Rightarrow x=\pm 3$
$\pm$	plusminus	$x=\pm 3$ heißt $x=3$ oder $x=-3$
$\sum$	Summe	$\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$ Summe der Quadratzahlen von 1 bis n^2
$\prod$	Produkt	$\prod\limits_{k=1}^{n}k^2$ Produkt der Quadratzahlen von 1 bis n^2
∞	unendlich	unendlich eben
$\longrightarrow$	strebt nach	$x\longrightarrow 2$: x nähert sich 2 immer dichter an $x\longrightarrow\infty$: x wird immer größer, strebt nach unendlich

Mengenlehre

Symbol	Name	Definition
$\{...\}$	Mengenklammern	umschließt eine unsortierte Liste der **Elemente**
$\{x\|...\}$	mit (der Eigenschaft)	$\{x\|x$ reell und gerade$\}$
$\in$	in, Element von	$a\in A$ besagt, dass a ein Element von A ist
$\subset$	echte Teilmenge	$A\subset B$ besagt, dass A ganz in B liegt, aber nicht identisch mit B ist
$\subseteq$	enthalten, Teilmenge	$A\subseteq B$ besagt, dass A ganz in B liegt, aber auch identisch mit B sein kann
$\cap$	Schnitt	$A\cap B$ alle Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören
$\cup$	Vereinigung	$A\cup B$ alle Elemente, die zu A oder zu B oder zu beiden gehören
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen	$\{1,2,3,...\}$
$\mathbb{N}_0$	natürliche Zahlen	$\{0,1,2,3,...\}$
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen	$\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen, Brüche	$\{\frac{p}{q}\|p\in\mathbb{Z}$ und $q\in\mathbb{N}\}$
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen	beliebige Dezimahlzahlen, alles was in der Schule drankommt
$(;)$	offenes Intervall	$(0;3)\equiv\{x\in\mathbb{R}\|0<x<3\}$
$[;]$	abgeschlossenes Intervall	$[0;3]\equiv\{x\in\mathbb{R}\|0\leq x\leq 3\}$
$(;]$ bzw. $[;)$	halb abgeschlossenes Intervall	$(0;3]\equiv\{x\in\mathbb{R}\|0<x\leq 3\}$ bzw. $[0;3)\equiv\{x\in\mathbb{R}\|0\leq x<3\}$

Analysis

Symbol	Name	Definition
f(x)	Funktion	eindeutige Zuordnungsvorschrift von Werten der unabhängigen Variablen x zur abhängigen Variablen $y = f(x)$. Definition über Funktionsgleichung, Graph, Wertetabelle oder Messvorschrift
$\mathcal{D}_f$	Definitionsmenge	Menge der erlaubten/sinnvollen Werte für x
$\mathcal{B}_f$	Bildmenge	Menge aller Werte, die y annimmt
	f gerade	symmetrisch zur y–Achse: $f(-x) = f(x)$ für alle x
	f ungerade	symmetrisch zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$ für alle x
	lineare Funktion	Graph: Gerade, Gleichung: $f(x) = m \cdot x + b$ m: Steigung, b: Anfangswert/y-Achsenabschnitt
	quadrat. Funktion	Graph: Parabel Normalform: $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ Scheitelpunktform: $f(x) = a\,(x - x_s)^2 + y_s$ Produktform: $f(x) = a\,(x - x_1)(x - x_2)$ a: Streck–/Stauchfaktor, b: Anfangssteigung, c: Anfangswert/y-Achsenabschnitt, (x_s, y_s): Scheitelpunkt, x_1, x_2: Nullstellen
	Potenzfunktion	Gleichung: $f(x) = a \cdot x^n$ a: Vorfaktor, n: Potenz/Exponent
	ganzration. Funkt. Polynom	Gleichung $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ Grad n, max. n Nullstellen, $n-1$ Extremstellen, $n-2$ Wendestellen
	Exponentialfunktion	Gleichung $f(x) = y_0 \cdot a^{x/\Delta x} = y_0\, e^{x \cdot \ln a/\Delta x}$ y_0: Anfangswert, a: Basis/Faktor, Δx: Ver–a–fachungszeit
	ELWSFs	$A : (x_A \vert x_b), B : (x_B \vert y_B)$ lineare Funktion: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, f(x) = m(x - x_A) + y_A$ Potenzfunktion: $n = \log_{\frac{x_B}{x_A}}(\frac{y_B}{y_a}) = \frac{\ln y_B - \ln y_A}{\ln x_B - \ln x_A}$ $f(x) = y_A \left(\frac{x}{x_A}\right)^n$ Exponentialfunktion: $f(x) = y_A \cdot \left(\frac{y_B}{y_A}\right)^{\frac{x - x_A}{x_B - x_A}}$
$f'(x)$	Ableitung	$f'(x) \equiv \frac{df}{dx}(x) := \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ lokale Steigung/Änderungsrate $\frac{d}{dx}\,\text{const} = 0$ $\frac{d}{dx}\,x^n = n \cdot x^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{R}$ $\frac{d}{dx}\,\sin(x) = \cos(x)$ $\frac{d}{dx}\,\cos(x) = -\sin(x)$ $\frac{d}{dx}\,\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ $\frac{d}{dx}\,\ln(x) = \frac{1}{x}$ $\frac{d}{dx}\,e^x = e^x$
$(u \cdot v)'$	Produktregel	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$\left(\frac{u}{v}\right)'$	Quotientenregel	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$f(z(x))'$	Kettenregel	$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$ äußerer mal innerer Ableitung

<table>
<tr><th>Symbol</th><th>Name</th><th>Definition</th></tr>
<tr><td></td><td>spez. Punkte</td><td>
<table>
<tr><th>Name</th><th>notwendig</th><th>hinreichend</th></tr>
<tr><td>Nullstelle</td><td>$f(x_0) \stackrel{!}{=} 0$</td><td>$f(x_0) \stackrel{!}{=} 0$</td></tr>
<tr><td>Minimum</td><td>$f'(x_E) \stackrel{!}{=} 0$</td><td>$f'(x_E) \stackrel{!}{=} 0$ und $f''(x_E) > 0$</td></tr>
<tr><td>Maximum</td><td>$f'(x_E) \stackrel{!}{=} 0$</td><td>$f'(x_E) \stackrel{!}{=} 0$ und $f''(x_E) < 0$</td></tr>
<tr><td>Wendepunkt</td><td>$f''(x_W) \stackrel{!}{=} 0$</td><td>$f''(x_W) \stackrel{!}{=} 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$</td></tr>
<tr><td>Sattelpunkt</td><td>$f'(x_S) \stackrel{!}{=} 0$ und $f''(x_S) \stackrel{!}{=} 0$</td><td>$f'(x_S) \stackrel{!}{=} 0$ und $f''(x_S) \stackrel{!}{=} 0$ und $f'''(x_S) \neq 0$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>$F(x)$</td><td>Stammfunktion</td><td>F heißt Stammfunktion von f, falls $F'(x) = f(x)$ für alle x</td></tr>
<tr><td>$\int f(x)\,dx$</td><td>unbestimmtes Integral</td><td>Menge aller Stammfunktionen zu f, $\int f(x)\,dx = F(x) + \text{const}$
$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \text{const}$ für alle $n \in \mathbb{R}$ außer -1
$\int \text{const}\,dx = \text{const} \cdot x$
$\int cos(x)\,dx = sin(x) + \text{const}$
$\int sin(x)\,dx = -cos(x) + \text{const}$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + \text{const}$
$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x + \text{const}$
$\int e^x\,dx = e^x + \text{const}$
$\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + \text{const}$</td></tr>
<tr><td></td><td>Linearität</td><td>$\int a \cdot f(x) + b \cdot g(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx + b \cdot \int g(x)\,dx$</td></tr>
<tr><td></td><td>partielle Integration</td><td>$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx$</td></tr>
<tr><td></td><td>Substitution</td><td>$\int f(y(x))\,dx = \int f(y) \cdot \frac{dx}{dy}\,dy$</td></tr>
<tr><td>$\int_a^b f(x)\,dx$</td><td>bestimmtes Integral</td><td>$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$ mit $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ und $x_i = a + i \cdot \Delta x$</td></tr>
<tr><td></td><td>Hauptsatz</td><td>$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$</td></tr>
<tr><td></td><td>Rotationsvolumen</td><td>$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$</td></tr>
<tr><td></td><td>Kurvenlänge</td><td>$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$</td></tr>
</table>

Geometrie

Symbol	Name	Definition
$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$	Vektor	Vektor mit den Komponenten bezogen auf ein kartesisches Koordinatensystem
$v \equiv \lvert\vec{v}\rvert$	Betrag	Betrag oder Länge von $\vec{v}$: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$
$\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{v}$	Einheitsvektor	Reine Richtung: Vektor in $\vec{v}$–Richtung mit Betrag 1
$\circ$	Skalarprodukt	$\vec{v} \circ \vec{w} = v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z = v \cdot w \cdot cos(\alpha)$
$\vec{x} \equiv \overrightarrow{\mathcal{O}X}$	Ortsvektor	Vektor vom Ursprung $\mathcal{O}$ zum Punkt X, Komponenten identisch mit den Koordinaten von X: $\overrightarrow{\mathcal{O}X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{PQ}$	Verschiebungsvektor	Vektor vom Punkt P zum Punkt Q, Komponenten identisch mit der Differenz der Koordinaten von P und Q $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\mathcal{O}Q} - \overrightarrow{\mathcal{O}P}$
$\times$	Kreuzprodukt	$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y \\ v_z \cdot w_x - v_x \cdot w_z \\ v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x \end{pmatrix}, \quad \lvert\vec{v} \times \vec{w}\rvert = v \cdot w \cdot sin(\alpha)$
$\parallel$	parallel	
$\perp$	senkrecht	
$\vec{w}_\parallel$	Parallelanteil	Anteil von $\vec{w}$ parallel zu einem Vektor $\vec{v}$: $\vec{w}_\parallel = (\vec{e}_v \circ \vec{w}) \cdot \vec{e}_v, \quad w_\parallel = \lvert\vec{e}_v \circ \vec{w}\rvert$
$\vec{w}_\perp$	Senkrechtanteil	Anteil von $\vec{w}$ senkrecht zu einem Vektor $\vec{v}$: $\vec{w}_\perp = \vec{w} - \vec{w}_\parallel = \vec{e}_v \times \vec{w} \times \vec{e}_v, \quad w_\perp = \lvert\vec{e}_v \times \vec{w}\rvert$
g	Gerade	Parameterform: $\overrightarrow{\mathcal{O}X}(t) = \overrightarrow{\mathcal{O}P} + t \cdot \vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$
E	Ebene	Parameterform: $\overrightarrow{\mathcal{O}X}(t) = \overrightarrow{\mathcal{O}P} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}, \quad s,t \in \mathbb{R}$ Normalenform: $\vec{n} \circ \overrightarrow{\mathcal{O}X} = \vec{n} \circ \overrightarrow{\mathcal{O}P} = b, \quad \vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ Koordinatengleichung: $n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z = b$ SP mit Achsen: $S_x : (\frac{b}{n_x}\lvert 0 \rvert 0), S_y : (0\lvert\frac{b}{n_y}\rvert 0), S_z : (0\lvert 0 \rvert\frac{b}{n_z})$
d	Abstand	Abstand Punkt-Punkt: $d = \lvert\overrightarrow{PQ}\rvert$ Abstand Punkt–Gerade: $d = \lvert\vec{e}_v \times \overrightarrow{PQ}\rvert$ Abstand Punkt–Ebene: $d = \lvert\vec{e}_n \circ \overrightarrow{PQ}\rvert$ Abstand Gerade–Gerade: $d = \lvert\vec{e}_n \circ \overrightarrow{PQ}\rvert, \quad$ falls $\vec{v} \nparallel \vec{w}$ $d = \lvert\vec{e}_v \times \overrightarrow{PQ}\rvert, \quad$ falls $\vec{v} \parallel \vec{w}$
P_L	Lotfußpunkt	Lot von P auf Gerade $Q, \vec{v}$: $\overrightarrow{\mathcal{O}P_L} = \overrightarrow{\mathcal{O}P} + \overrightarrow{PQ}_\perp = \overrightarrow{\mathcal{O}P} + \vec{e}_v \times \overrightarrow{PQ} \times \vec{e}_v$ $\overrightarrow{\mathcal{O}P_L} = \overrightarrow{\mathcal{O}Q} - \overrightarrow{PQ}_\parallel = \overrightarrow{\mathcal{O}Q} - (\vec{e}_v \circ \overrightarrow{PQ}) \cdot \vec{e}_v$ Lot von P auf Ebene $Q, \vec{n}$: $\overrightarrow{\mathcal{O}P_L} = \overrightarrow{\mathcal{O}P} + \overrightarrow{PQ}_\parallel = \overrightarrow{\mathcal{O}P} + (\vec{e}_n \circ \overrightarrow{PQ}) \cdot \vec{e}_n$ Lotfußpunkt bei windschiefen Geraden $P, \vec{v}$ und $Q, \vec{w}$: $\overrightarrow{\mathcal{O}P_L} = \overrightarrow{\mathcal{O}P} + \overrightarrow{PP_L} = \overrightarrow{\mathcal{O}P} + \frac{\vec{n}_* \circ \overrightarrow{PQ}}{\vec{n}_* \circ \vec{v}} \vec{v}$ mit $\vec{n}_* := \vec{w} \times \vec{v} \times \vec{w}$ alternativ: $\vec{v} \circ \overrightarrow{P_L Q_L} \stackrel{!}{=} 0$ und $\vec{w} \circ \overrightarrow{P_L Q_L} \stackrel{!}{=} 0$
A_{par}	Fläche eines Parallelogramms	$A_{par} = \lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert$
V_{Spat}	Vol. eines Spates	$V_{spat} = \lvert\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})\rvert$
K	Kugel	Kugelgleichung: $\lvert\overrightarrow{MX}\rvert^2 = (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = R^2$ Schnittkreis M_*, r mit Ebene: $r^2 = R^2 - d^2$ mit $d = \lvert\vec{e}_n \circ \overrightarrow{MP}\rvert$ $\overrightarrow{\mathcal{O}M_*} = \overrightarrow{\mathcal{O}M} + (\vec{e}_n \circ \overrightarrow{MP}) \cdot \vec{e}_n$

Stochastik

Symbol	Name	Definition
ω	Ergebnis	möglicher Ausgang eines Zufallsexperimentes
Ω	Ergebnismenge	Menge aller Ergebnisse eines Zufallsexperimentes
$E \in \Omega$	Ereignis	Teilmenger aller Ergebnisse eines Zufallsexperimentes
	unvereinbar	E und F sind unvereinbar, wenn sie nicht gleichzeitig auftreten können
$H(\omega)$, $H(E)$	absolute Häufigkeit	Zahl, wie oft ω bzw. E bei N–maligem Durchführen des Zufallsexperimentes auftritt
$h(\omega)$, $h(E)$	relative Häufigkeit	relative Zahl, wie oft ω bzw. E bei N–maligem Durchführen des Zufallsexperimentes auftritt: $h(\omega) = H(\omega)/N$ bzw. $h(E) = H(E)/N$
$P(\omega)$, $P(E)$	Wahrscheinlichkeit	W. für das Eintreffen des Ergebnisses ω bzw. des Ereignisses E einem einmaligem Durchführen des Zufallsexperimentes, es gilt: $$P(E) = \sum_{\omega \in E} P(\omega)$$
	stoch. unabhängig	E, F stoch. unabh.: $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$
$P(E\|F)$	bedingte Wahrsch.	$P(E\|F)$ W. für E, unter der Voraussetzung, dass F erfüllt. Es gilt: $$P(E \cap F) = P(E\|F) \cdot P(F)$$
!	Fakultät	$5! := 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$\binom{n}{k}$	n über k	$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ TR: nCr
$b_{n,p}(k)$	Binomialverteilung	$P(K = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ Mittelwert: $< K >= n \cdot p$, Varianz: $Var(K) = n \cdot p \cdot (1-p)$
	Hypergeom. Vert.	Ziehe n von N Losen unter denen K Gewinnlose: $P(k \text{ Erfolge}) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{n}{k} \cdot \binom{N-n}{K-k}}{\binom{N}{K}}$
φ, Φ	Normalverteilung	W.–Dichte: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $P(X \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} \varphi(x)\,dx = \Phi(\frac{x_0 - \mu}{\sigma})$ Mittelwert: $< X >= \mu$, Varianz: $Var(X) = \sigma^2$
	Poissonverteilung	$P(K = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$, k=0,1,2,.. Mittelwert: $< K >= \mu$, Varianz: $Var(K) = \mu$
	Näherung von Moivre und Laplace	K sei n,p–binomialverteilt mit $\sigma := \sqrt{n\,p\,(1-p)} > 3$ $P(K \leq k_0) \approx \Phi(\frac{k_0 + 0,5 - \mu}{\sigma})$ mit $\mu := n \cdot p$
	Signifikanztest	$H_0 : p_w = p_0$, $\mu_0 := n\,p_0$, $\sigma_0 := \sqrt{n\,p_0\,(1-p_0)}$ Signifikanzniveau: $\alpha = P_{p_0}(Ablehnungsbereich)$ Ablehnung links: $K \leq \mu_0 - 0,5 - c \cdot \sigma_0$ mit c aus $\Phi(c) = 1 - \alpha$ Ablehnung rechts: $K \geq \mu_0 + 0,5 + c \cdot \sigma_0$ mit c aus $\Phi(c) = 1 - \alpha$ Ablehnung beidseitig: $K \leq \mu_0 - 0,5 - c \cdot \sigma_0$ oder $K \geq \mu_0 + 0,5 + c \cdot \sigma_0$ mit c aus $\Phi(c) = 1 - \alpha/2$ Fehler 2. Art: $\beta = P_{p_w}(Annahmebereich)$ unter der Voraussetzung, dass $p_w \neq p_0$

Symbol	Name	Definition
	Konfidenzintervall	Stichprobe: n, rel. Häuf.: h, Konfidenzniveau: γ Konfidenzintervall : $h - c \cdot \sqrt{\dfrac{h(1-h)}{n}} \leq p_w \leq h + c \cdot \sqrt{\dfrac{h(1-h)}{n}}$ mit c aus $\Phi(c) = 0,5 + \dfrac{\gamma}{2}$
	Vierfeldertafel	Zerlegungen: $\Omega = A \cup B \cup C = X \cup Y$

	A	B	C	Σ	A	B	C
X							
Y		$P(B \cap Y)$		$P(Y)$		$P(B \mid Y)$	
Σ		$P(B)$		1			
X							
Y		$P(Y \mid B)$					